Les fonctions

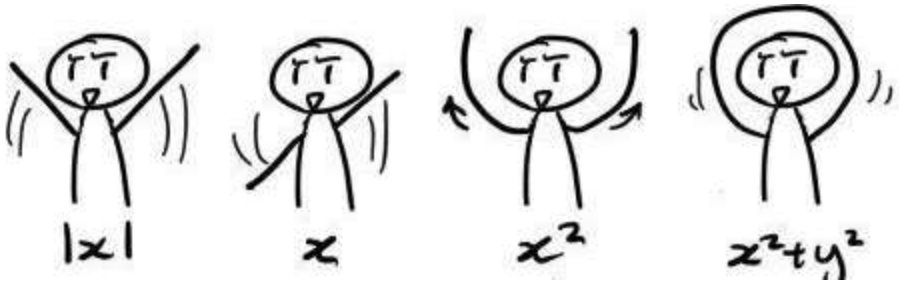
C

2e partie

Chapitre 2

NOTES DE COURS ET EXERCICES

Mathématique CST4
Collège Regina Assumpta
2018-2019
Madame Blanchette



Inspiré du document de notes de cours
de Audrey-Ann Bossé (CDSL)

Nom : _____

Groupe : _____

NOTES DE COURS

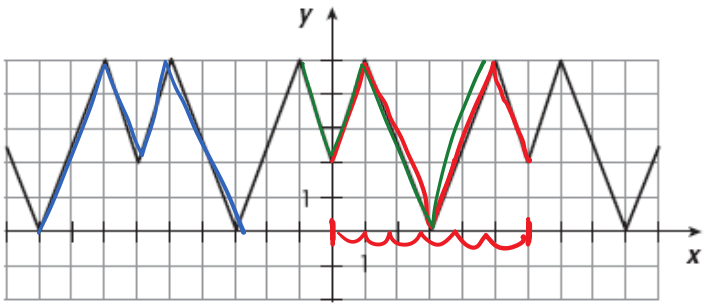
1. La fonction périodique

En mathématique, une fonction est dite périodique lorsque sa représentation graphique est constituée d'un « motif » qui se répète. L'écart entre les abscisses situées aux extrémités de ce « motif » correspond à la période de la fonction. Des exemples de telles fonctions peuvent être obtenus à partir de phénomènes périodiques, comme l'heure indiquée par la petite aiguille d'une horloge, les phases de la lune, etc.

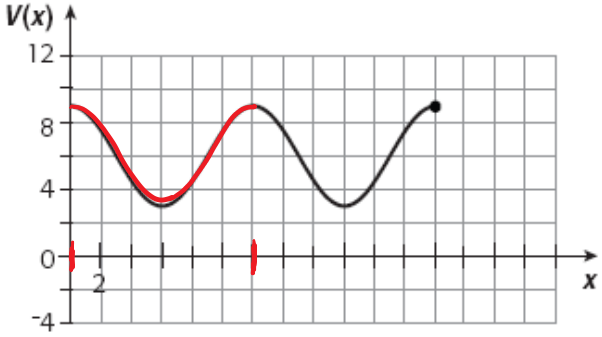
Exemples :

1) Chacun des graphiques suivants représente une fonction périodique. Pour chacun de ces graphiques, indique la période.

a) p = 6

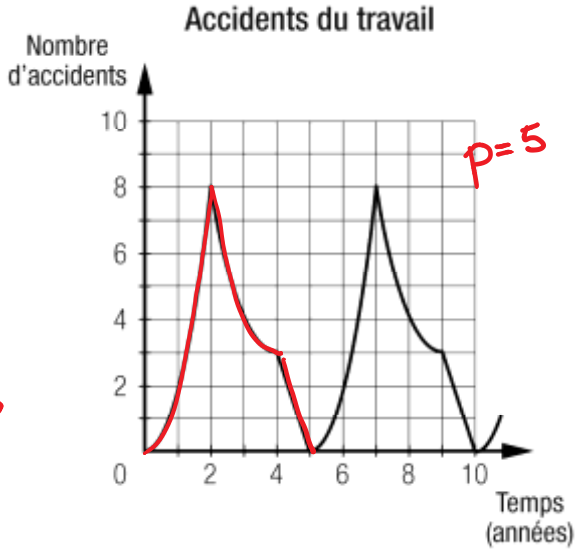


b) p = 12



2) Le contremaître d'une usine a comptabilisé le nombre annuel d'accidents du travail depuis l'ouverture de cette usine. Il a ensuite modélisé la situation à l'aide de la fonction représentée ci-dessous.

D'après ce modèle, combien devrait-on dénombrer d'accidents de travail :



a) au cours de la 10e année de travail ? 0

b) au cours de la 12e année de travail ? 8 (2 unités après 10)

c) au cours de la 24e année de travail ? 3

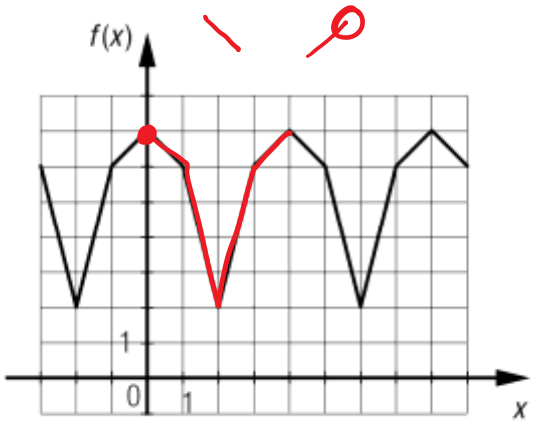
24 ÷ 5 = 4,... → 4 périodes + 4 unités restantes (4 × 5 = 20)

3) Soit le graphique d'une fonction périodique.

f(24) = f(4) = 3

a) Quelle est la période de cette fonction ?_____

p = 4



b) Calcule

i) $f(17) =$ 6

ii) $f(-11) =$ 6

iii) $f(40) =$ 7

iv) $f(1841) =$ 6

1) Trouver f(17)

17 ÷ 4 = 4, ...

donc 4 × 4 = 16

f(16) = f(0)

+1 ↓ ↓ +1

f(17) = f(1) = 6

2) Trouver f(-11)

-11 ÷ 4 ≈ -2, ...

donc -3 × 4 = -12

f(-12) = f(0)

+1 ↓ ↓ +1

f(-11) = f(1) = 6

3) Trouver f(40)

40 ÷ 4 = 10

f(40) = f(0) = 7

4) Trouver f(1841)

1841 ÷ 4 = 460, ...

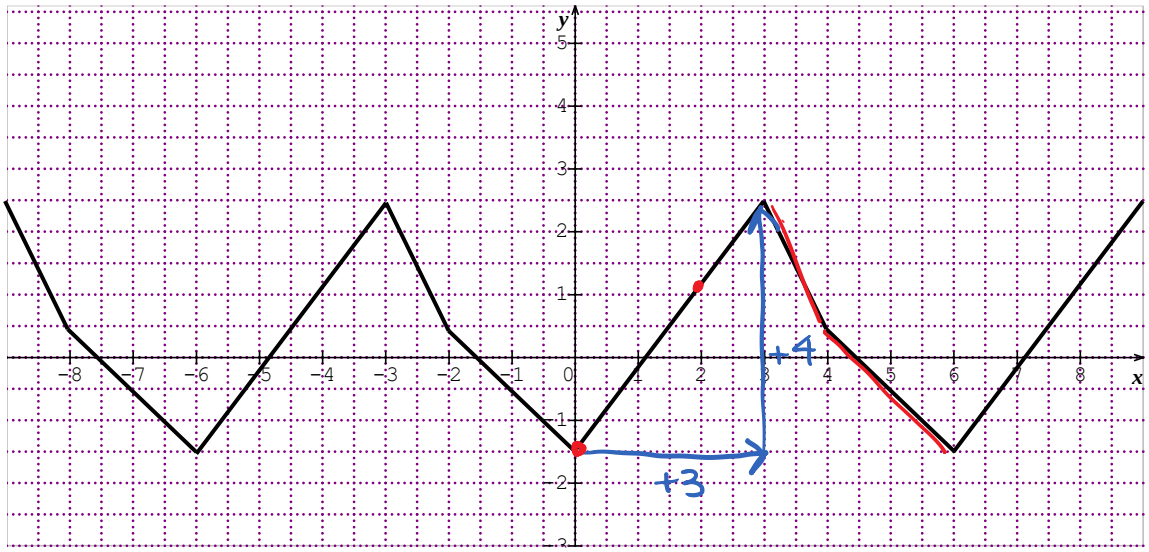
donc 4 × 460 = 1840

f(1840) = f(0)

+1 ↓ ↓ +1

f(1841) = f(1) = 6

4) Soit le graphique d'une fonction périodique. Calcule $f(20)$.



1) Période

$p = 6$

2) Trouver $f(20)$

$20 \div 6 = 3, \ldots$

donc $3 \times 6 = 18$

$f(18) = f(0)$

+2 ↓ ↓ +2

$f(20) = f(2) = ?$

3) Trouver la règle ①

a) Taux de variation

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{3}$

b) Val. initiale

$b = -1,5$

$y = \frac{4}{3}x - 1,5$

4) Trouver $f(2)$

$y = \frac{4}{3} \cdot 2 - 1,5$

$y = \frac{8}{3} - \frac{3}{2}$

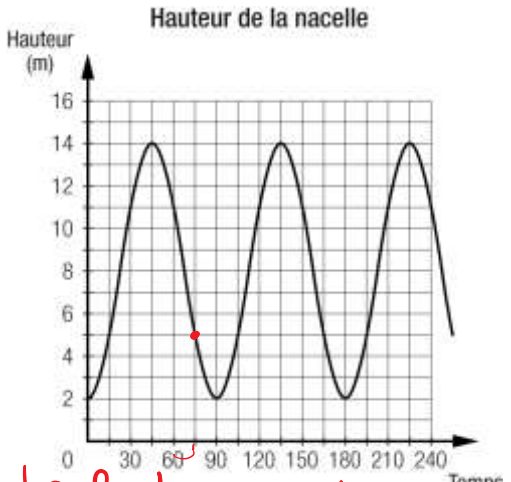
$y = \frac{16 - 9}{6}$

$y = \frac{7}{6}$

donc

$f(20) = \frac{7}{6}$

5) La Grande Roue est l'un des manèges les plus appréciés des jeunes enfants. Le graphique ci-contre représente la hauteur d'une nacelle par rapport au sol en fonction du temps. À quelle hauteur se trouvera la nacelle 525 s après le départ ? Justifiez votre réponse.

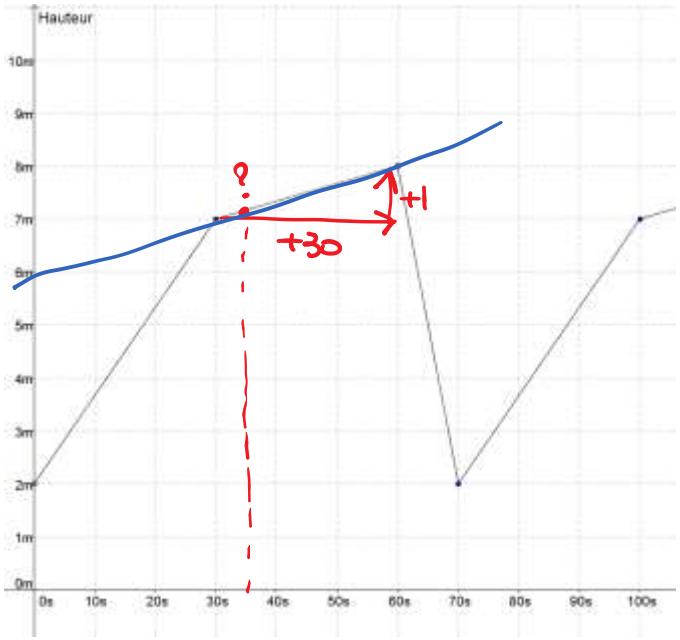


1) période
$p = 90$

2) Trouver $f(525)$
$525 \div 90 = 5,\ldots$
$5 \times 90 = 450$
$f(450) = f(0)$
$+75 \downarrow \quad \downarrow +75$
$f(525) = f(75) = 5\text{m}$

La hauteur sera de 5m, soit la même hauteur qu'à 75 secondes.

6) La Grande Roue est l'un des manèges les plus appréciés des jeunes enfants. Le graphique ci-contre représente la hauteur d'une nacelle par rapport au sol en fonction du temps. À quelle hauteur se trouvera la nacelle 525 s après le départ ? Justifiez votre réponse.



1) période
$p = 70$

2) Trouver $f(525)$
$525 \div 70 = 7,\ldots$
donc $7 \times 70 = 490$
$f(490) = f(0)$
$+35 \downarrow \quad \downarrow +35$
$f(525) = f(35) = ?$

3) Règle partie ②
a) Taux de variation
$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{30}$
b) Val. initiale
$y = \frac{1}{30}x + b$
$7 = \frac{1}{30} \cdot 30 + b$
$7 = 1 + b$
$6 = b \quad y = \frac{1}{30}x + 6$

4) Trouver $f(35)$
$y = \frac{1}{30} \cdot 35 + 6$
$y = \frac{43}{6}$
$= 7,1\overline{6}\text{ m}$
$\approx 7,2\text{ m}$

2. La fonction quadratique

Les fonctions polynomiales de degré deux que nous allons étudier sont sous la forme

$$f(x) = ax^2$$

Il n'y a donc qu'un paramètre à considérer si l'on veut donner la règle d'une fonction polynomiale de degré deux : le paramètre *a*. Mais avant d'apprendre à trouver la règle de cette fonction, regardons le rôle que joue le paramètre *a.*

A) Le rôle du paramètre « *a* »

Dans le plan cartésien ci-dessous, représente les fonctions polynomiales suivantes :

$f(x) = 2x^2$ et $g(x) = -3x^2$

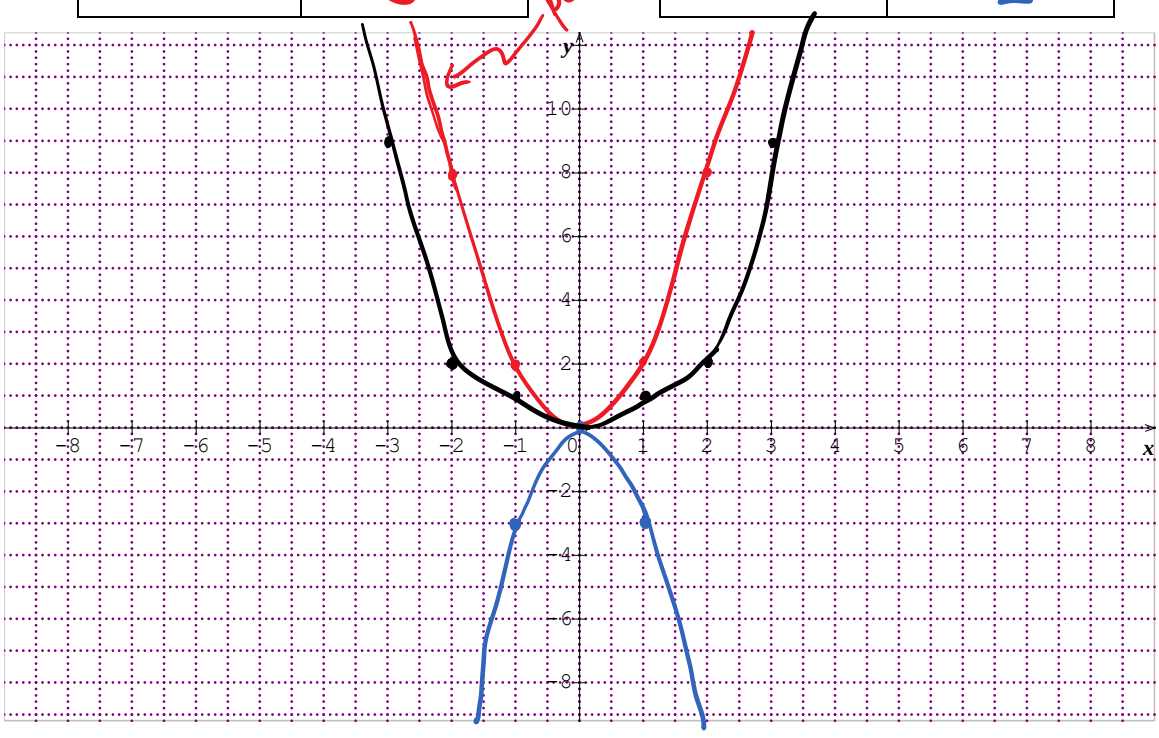
Complète ensuite la conclusion qu'il faut tirer quant au rôle de ce paramètre.

$f(x) = 2x^2$

x	y
-1	2
0	0
1	2
2	8

$f(x) = -3x^2$

x	y
-1	-3
0	0
1	-3
2	-12



Lorsque le paramètre *a* est positif, la parabole est ouverte vers le haut.

Lorsque le paramètre *a* est négatif, la parabole est ouverte vers le bas.

Plus |a| est grand, plus la parabole s'approche de l'axe des y.

Plus |a| est petit (fraction), la parabole s'éloigne de l'axe des y.

Toutes les fonctions polynomiales de degré deux que nous étudierons en CST ont leur sommet en (0,0).

Valeur absolue ↓ ne pas tenir compte du signe

Exemple : Dans chaque cas, associez le graphique à la règle qui le traduit.

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^2$ ④

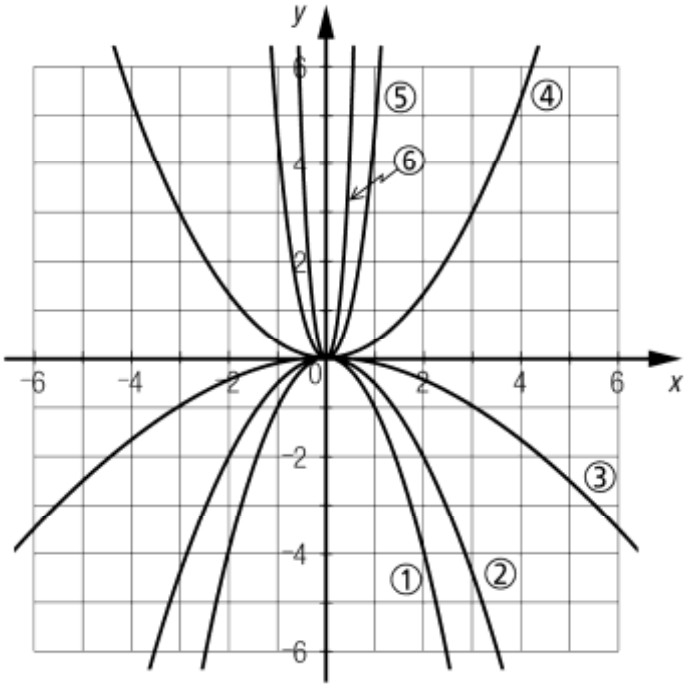
b) $g(x) = -0{,}5x^2$ ②

c) $h(x) = 20x^2$ ⑥

d) $i(x) = -x^2$ ①

e) $j(x) = 5x^2$ ⑤

f) $k(x) = -\frac{1}{10}x^2$ ③

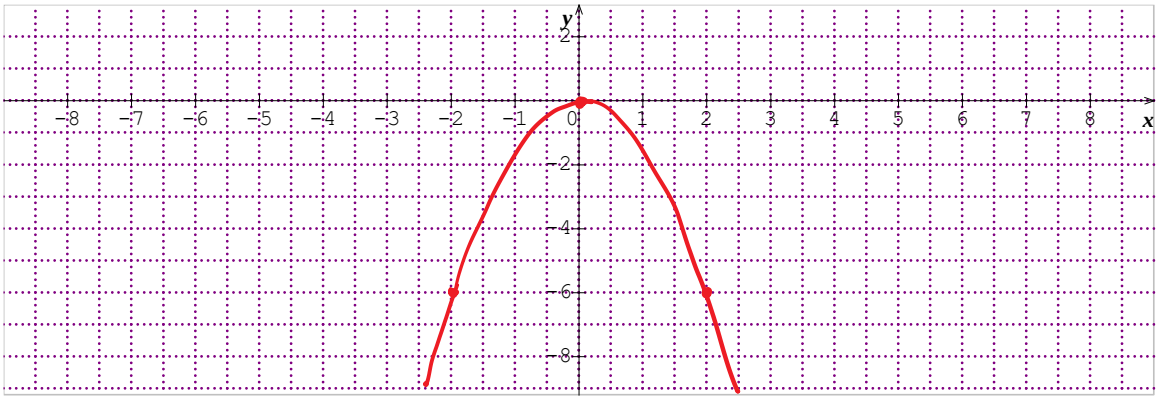


p.9

B) Étude d'une fonction polynomiale de degré deux

Exemple : Fais l'étude de la fonction $f(x) = -1{,}5x^2$ en complétant le tableau ci-dessous. Construis d'abord le graphique de cette fonction.

x	y
-2	-6
0	0
2	-6

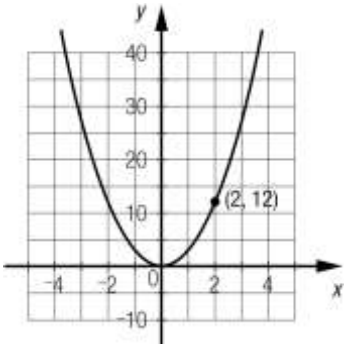


a) Détermine le domaine et l'image de la fonction.	dom : $\mathbb{R}$ ima : $-\infty, 0]$ ou $\mathbb{R}_-$
b) Étudie le signe (positif et négatif) de cette fonction.	positif : $\emptyset$ négatif : $\mathbb{R}$
c) Étudie la variation (croissance et décroissance) de cette fonction.	croissance : $-\infty, 0]$ décroissance : $[0, \infty$

C) Recherche de la règle d'une fonction polynomiale de degré deux

En connaissant les coordonnées d'un point (autre que l'origine) qui appartient à une fonction polynomiale de degré deux, il est possible de déterminer sa règle sous la forme $f(x) = ax^2$.

Exemple : Soit le graphique ci-contre représentant une fonction polynomiale de degré deux.



a) Quelle est la règle de la fonction polynomiale pouvant être associée au graphique ci-contre?

$y = ax^2$
$12 = a \cdot (2)^2$
$12 = a \cdot 4$
$12 = 4a$
$3 = a$

$y = 3x^2$

b) Calcule $f(10)$ et $f\left(\frac{1}{3}\right)$ on cherche y

$f(x) = 3x^2$
$f(10) = 3 \cdot (10)^2$
$= 300$
$(10, 300)$

$f(x) = 3x^2$
$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$
$= 3 \cdot \frac{1}{9}$
$= \frac{3}{9}$
$= \frac{1}{3}$

parenthèses obligatoires pour les fractions.

$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

c) Détermine la ou les valeurs de x lorsque $f(x) = 27$ et lorsque $f(x) = 108$.

$f(x) = 3x^2$
$27 = 3x^2$
$\sqrt{9} = \sqrt{x^2}$
$\pm 3 = x$

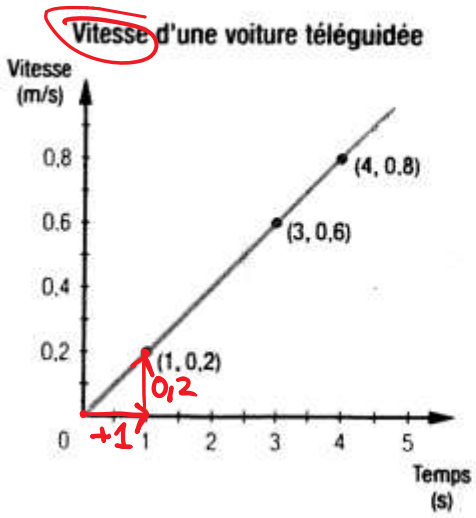
$f(x) = 3x^2$
$108 = 3x^2$
$\sqrt{36} = \sqrt{x^2}$
$\pm 6 = x$

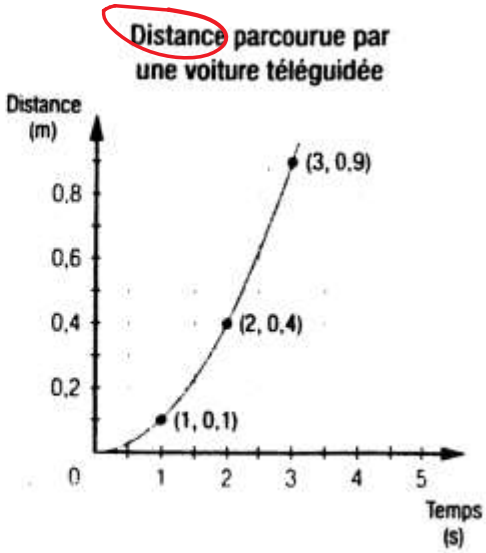
D) Résolution de problèmes avec la fonction polynomiale de degré deux

Maintenant que l'on est capable de déterminer la règle d'une fonction polynomiale de degré deux, nous pourrons résoudre différents problèmes contextualisés qui peuvent être modélisés par une fonction polynomiale de degré deux.

Exemples :

1) Voici des renseignements concernant le parcours d'une voiture téléguidée.





a) Au bout de 25 secondes, quelle sera la vitesse de la voiture?

1) Règle graphique ①

a) Taux de variation

$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0,2}{1} = 0,2$

$y = 0,2x$

2) Vitesse à 25 s

$y = 0,2x$

$y = 0,2 \cdot 25$

$y = 5$ m/s

b) Au bout de 25 secondes, quelle distance aura-t-elle parcourue?

1) Règle graphique ②

$y = ax^2$

$0,9 = a \cdot (3)^2$

$0,9 = 9a$

$0,1 = a$

$y = 0,1x^2$

2) Distance après 25 s

$y = 0,1x^2$

$y = 0,1 \cdot 25^2$

$y = 62,5$ m

c) Après combien de temps la vitesse de la voiture sera-t-elle de 11,5 m/s?

$y = 0,2x$

$11,5 = 0,2x$

$57,5 \text{ s} = x$

d) Après combien de temps la distance parcourue par la voiture sera-t-elle de 1260 mètres?

$y = 0,1x^2$

$1260 = 0,1x^2$

$\sqrt{12600} = \sqrt{x^2}$

$\pm 112,25 \text{ s} \approx x$, on rejète la valeur négative dans le contexte.

2) Une camionnette part du repos. Après 4 secondes, sa vitesse est de 30 km/h. Elle atteint sa vitesse maximale après 8 secondes. La vitesse de cette camionnette en fonction du temps est décrite par une fonction polynomiale de degré deux.

a) Quelle est la vitesse maximale atteinte par cette camionnette?

b) Au bout de combien de temps la vitesse de cette camionnette est-elle de 100 km/h?

E) La réciproque d'une fonction

Il est facile de déterminer la réciproque d'une fonction. Il suffit d'intervertir les valeurs de x et de y dans la table de valeurs.

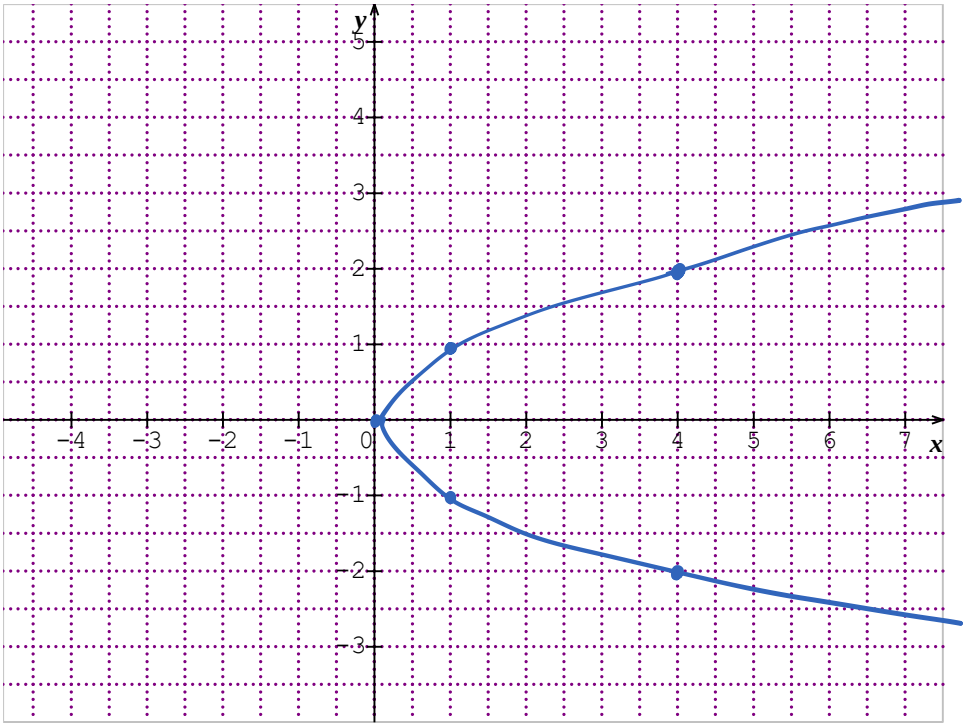
Exemple :

Table de valeurs de la fonction quadratique $f(x) = x^2$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	1	0	1	4

Table de valeurs de la réciproque

x	4	1	0	1	4
y	-2	-1	0	1	2



a) Quelle est la condition essentielle pour qu'une relation soit une fonction?

Pour chaque valeur de x, il y a au plus une valeur de y.

b) Est-ce que la réciproque d'une fonction quadratique est une fonction?

NON

e

F) Les fonctions définies par parties

Exemples :

1) Soit la fonction définie par parties suivante : $f(x) = \begin{cases} x & pour\ x \leq 0 \\ x^2 & pour\ 0 \leq x \leq 3 \\ 9 & pour\ x \geq 3 \end{cases}$

a) Représente cette fonction dans le plan cartésien ci-dessous.

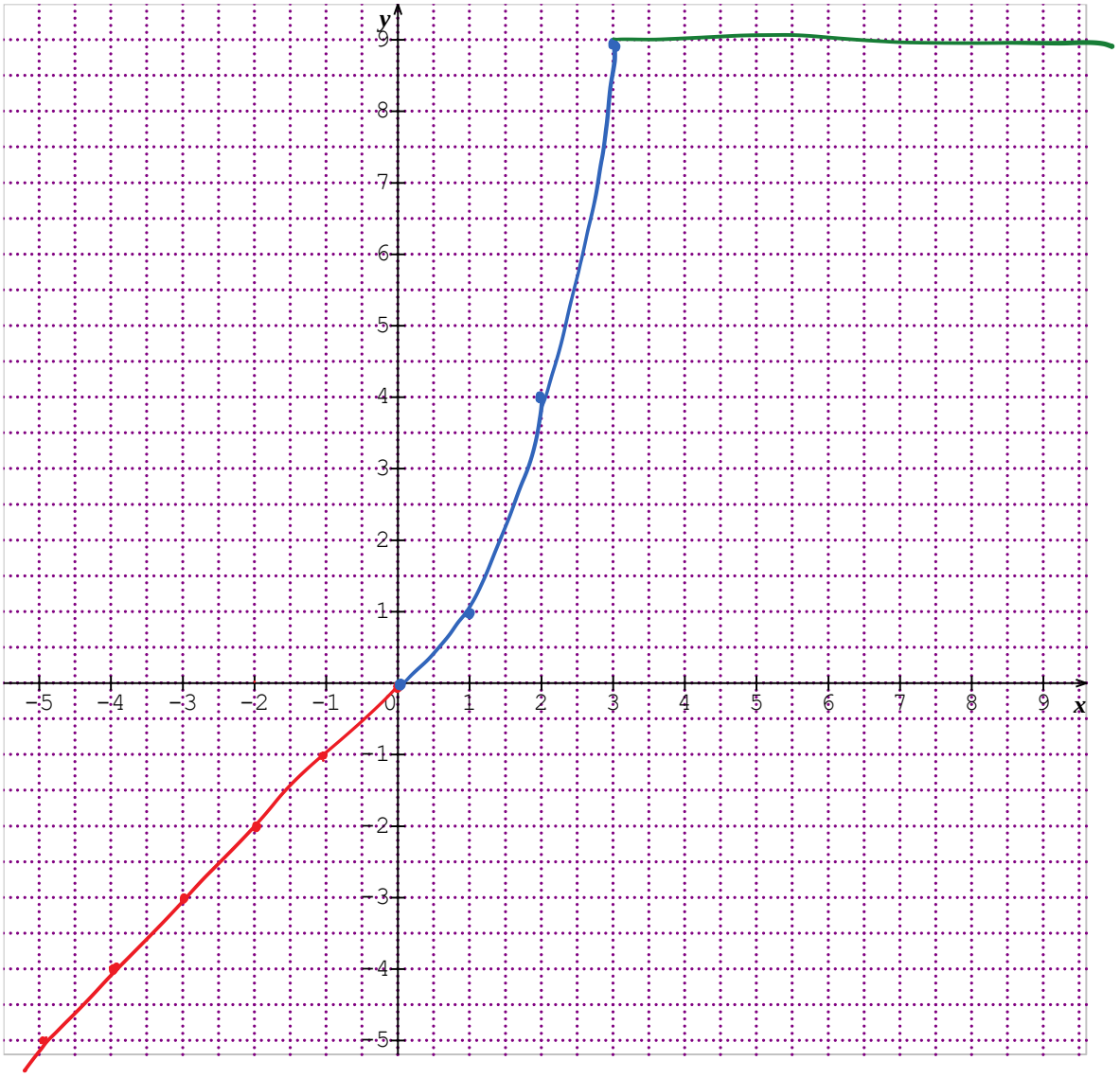
Partie ①
$y = 1x + 0$

x	y
-4	-4
-2	-2
0	0

Partie ②
$y = x^2$

x	y
0	0
1	1
2	4
3	9

Partie ③
$y = 9$



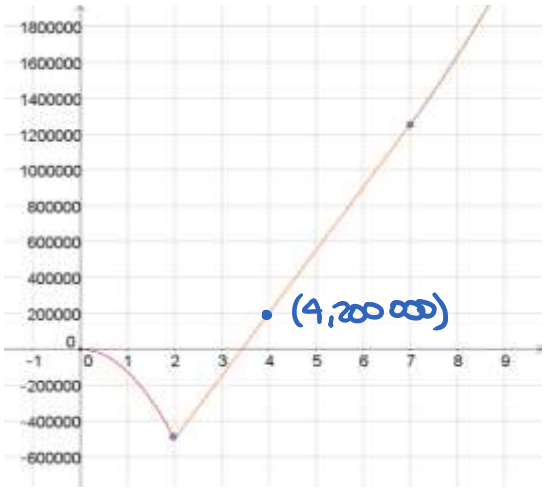
b) Calcule : i) *f* (1,5) ii) *f*(20)

2e partie
$f(x) = x^2$
$f(1,5) = 1,5^2$
$= 2,25$

3e partie
$f(20) = 9$

2) Les profits d'une PME évoluent en fonction du temps (en année) écoulé depuis son ouverture selon la règle suivante :

$$f(x) = \begin{cases} -125\,000x^2 & , \quad si\ x \in [0,2] \\ 350\,000x + b & , \quad si\ x \in [2,7] \\ ax^2 & , \quad si\ x \in [7,14] \end{cases}$$



Détermine le profit de l'entreprise 10 ans après son ouverture.

1) Trouver règle ②

$f(x) = 350000x + b$

$200\,000 = 350\,000 \cdot 4 + b$

$200\,000 = 1400000 + b$

$-1\,200\,000 = b$

$f(x) = 350000x - 1\,200\,000$

2) Trouver $f(7)$ → valeur critique

$f(7) = 350000 \cdot 7 - 1\,200\,000$

$f(7) = 1\,250\,000$

3) Trouver règle ③

$f(x) = ax^2$

$1250000 = a \cdot 7^2$

$1250000 = 49a$

$\frac{1250000}{49} = a$

$f(x) = \frac{1250000}{49}x^2$

4) Trouver $f(10)$

$f(10) = \frac{1250000}{49} \cdot 10^2$

$\approx 2551020{,}41\$$

3. La fonction exponentielle

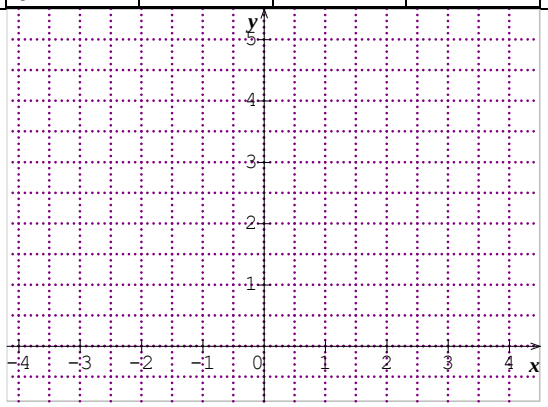
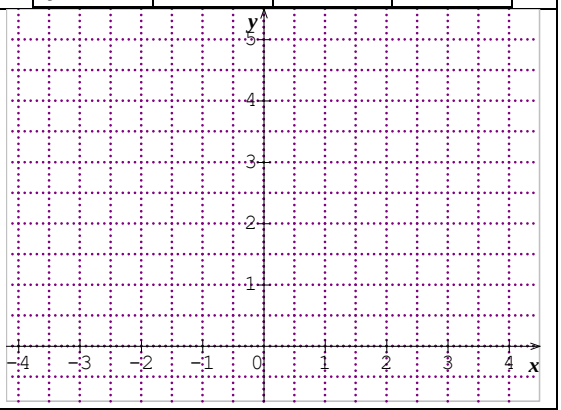
Une fonction définie par une règle dans laquelle la variable indépendante est un exposant est appelée une fonction exponentielle. Nous allons étudier des fonctions exponentielles qui sont de la forme

$$f(x) = a \cdot c^x$$

où *a* est la valeur initiale de la fonction et *c* est le facteur multiplicatif (ou base).
Ainsi, si nous devons déterminer la règle d'une fonction exponentielle, il faudra déterminer la valeur du paramètre *a* et de la base *c*, car ils jouent des rôles différents. Nous allons regarder leur rôle sur l'allure du graphique.

A) Le rôle de la base « c »

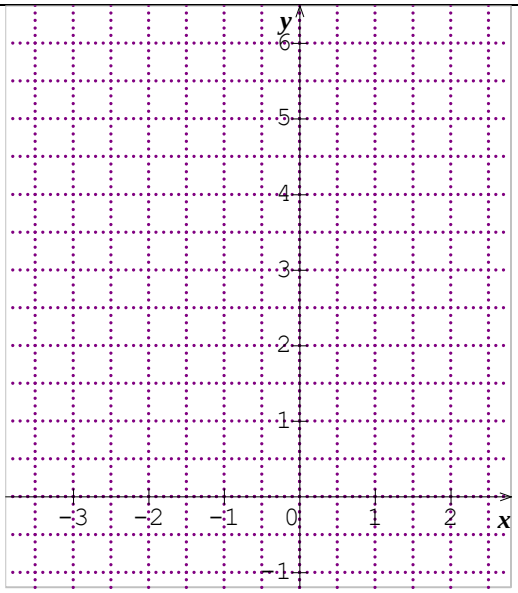
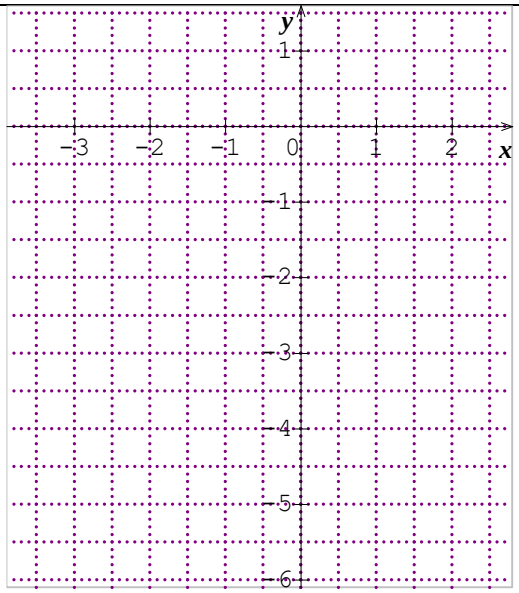
Tel que mentionné précédemment, le paramètre *c* représente le facteur multiplicatif de la fonction exponentielle. Ce paramètre ne peut pas être négatif. Sa valeur est un nombre plus grand que 0 et différent de 1. Regardons le rôle de ce paramètre sur l'allure générale du graphique d'une fonction exponentielle.

	$0 < c < 1$	$c > 1$
Règle	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$f(x) = 2^x$
Table des valeurs	x | -2 | 0 | 2 y |	x | -2 | 0 | 2 y |
Graphique		
Allure générale du graphique	La fonction est alors _____.	La fonction est alors _____.

Remarque:
La courbe des fonctions que nous venons de tracer ne touche pas à l'axe des « *x* ». Elle n'y touchera jamais. On dit alors que l'axe des « *x* » est une _____.

B) Le rôle du paramètre « *a* »

Tel que mentionné précédemment, la paramètre *a* représente la valeur initiale de la fonction exponentielle qui est de la forme $f(x) = a \cdot c^x$. Autrement dit, la paramètre *a* nous permet de connaître le point de la fonction qui croise l'axe des ordonnées. Il s'agit d'une information intéressante pour faire l'esquisse de la courbe. Regardons l'allure que prend le graphique lorsque le paramètre *a* est positif et lorsqu'il est négatif.

<table>
<tr><td></td><td>Paramètre a positif</td><td>Paramètre a négatif</td></tr>
<tr><td>Règle</td><td>$f(x) = 3 \cdot 2^x$</td><td>$f(x) = -3 \cdot 2^x$</td></tr>
<tr><td>Table des valeurs</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>y</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>
</td></tr>
<tr><td>Graphique</td><td> 
</td><td> 
</td></tr>
<tr><td>Conclusion</td><td colspan="2">Lorsque le signe du paramètre a change, la courbe subit une

_____.</td></tr>
</table>

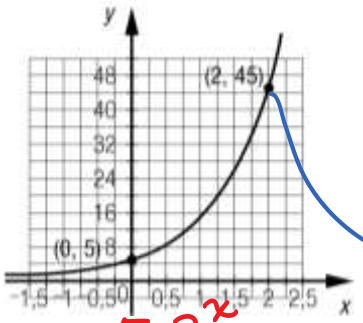
C) Recherche de la règle d'une fonction exponentielle lorsqu'on connaît la valeur initiale

À partir d'un graphique ou d'une table de valeurs, il est possible de déterminer la règle d'une fonction exponentielle sous la forme $f(x) = a \cdot c^x$ lorsqu'on connaît la valeur initiale et les coordonnées d'un autre point. Regardons des exemples concrets.

Exemples :

Dans chaque cas, détermine la règle de la fonction exponentielle associée au graphique ou à la table de valeurs.

a)



$y = 5 \cdot 3^x$

1) Paramètre a

$a = 5$ (C'est la valeur initiale.)

$y = 5 \cdot c^x$

2) Paramètre c → remplacer x et y et isoler.

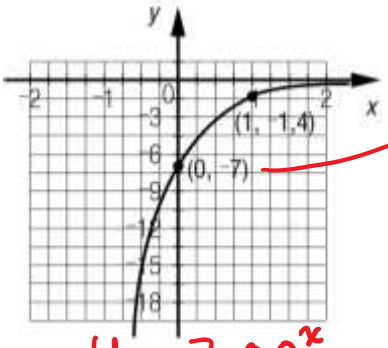
$45 = 5 \cdot c^2$

$\frac{45}{5} = \frac{5 \cdot c^2}{5}$

$\sqrt{9} = \sqrt{c^2}$

$\pm 3 = c$ → mais toujours positif

b)



$y = -7 \cdot 0{,}2^x$

1) Paramètre a

$a = -7$

2) Paramètre c

$y = -7 \cdot c^x$

$-1{,}4 = -7 \cdot c^1$

$0{,}2 = c$

c)

x	-1	0	4
y	1	2	32

1) Paramètre a

$a = 2$

$y = 2 \cdot 2^x$

2) Paramètre c

$y = 2 \cdot c^x$

$32 = 2 \cdot c^4$

$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{c^4}$

$2 = c$

$1 = 2 \cdot c^{-1}$

$\frac{1}{2} = c^{-1}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{c}$

$2 = c$

D) Résoudre une équation exponentielle

Le principe de la résolution d'une équation demeure toujours le même. Il s'agit de déterminer la valeur de l'inconnue. Par contre, l'inconnue dans une équation exponentielle est un exposant. Il s'agira donc d'exprimer chaque côté de l'équation à l'aide d'une base commune et la résolution deviendra évidente.

Résous les équations exponentielles suivantes.

a) $2^x = 16$

$2^x = 2^4$

$x = 4$

b) $3^x = 27$

$3^x = 3^3$

$x = 3$

c) $3^x = 243$

$3^x = 3^5$

$x = 5$

d) $\frac{5 \cdot 5^x}{5} = \frac{125}{5}$

$5^x = 25$

$5^x = 5^2$

$x = 2$

e) $\frac{2 \cdot 7^x}{2} = \frac{686}{2}$

$7^x = 343$

$7^x = 7^3$

$x = 3$

f) $\frac{1}{8} = 2^x$

$\frac{1}{2^3} = 2^x$

$2^{-3} = 2^x$

$-3 = x$

g) $8 \cdot 2^x = 0{,}5$

$\frac{0{,}5}{8} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$

$2^x = \frac{1}{16}$

$2^x = \frac{1}{2^4}$

$2^x = 2^{-4}$

$x = -4$

h) $21 = 7 \cdot 3^x$

$3 = 3^x$

$3^1 = 3^x$

$1 = x$

i) $\frac{1}{64} = 8^x$

$\frac{1}{8^2} = 8^x$

$8^{-2} = 8^x$

$-2 = x$

j) $-96 = -3 \cdot 2^x$

$32 = 2^x$

$2^5 = 2^x$

$5 = x$

Résolution de problèmes portant sur les fonctions exponentielles

Maintenant que nous savons comment déterminer l'équation d'une fonction exponentielle et que nous sommes capables de résoudre ce type d'équations, nous verrons comment nous pourrons résoudre différentes situations impliquant la fonction exponentielle.

Dans bien des cas, il faudra déterminer la règle de la fonction exponentielle sous la forme $f(x) = a \cdot c^x$ pour résoudre le problème.

Exemples :

1) Une colonie compte présentement 12 bactéries. Chaque heure, le nombre de bactéries double. Combien de bactéries y aura-t-il dans 8 heures?

facteur multiplicatif (c)

valeur initiale (a)

$y = 12 \cdot 2^x$

$y = 12 \cdot 2^8$

$y = 3072$ bactéries

y : nb bactéries

x : nb d'heures

2) Chaque année, la population de grenouilles d'un petit boisé est réduite de 5% par rapport à l'année précédente. Si le boisé compte actuellement 2000 grenouilles, combien restera-t-il de grenouilles dans 10 ans?

val. initiale

1) Facteur multiplicatif

Si la population diminue de 5% par rapport à l'an dernier, cela signifie qu'il reste 95% de la population.

$y = 2000 \cdot 0{,}95^x$

$y = 2000 \cdot 0{,}95^{10}$

$y \approx 1197{,}47$

donc 1197 grenouilles.

x : nb années

y : nb grenouilles

3) Jean-Michel vient de se procurer une toile de peinture très recherchée. Présentement, la valeur de cette toile est estimée à 10 500$. On prévoit que la valeur de cette toile augmentera de 10% à chaque année. À quel montant pourra-t-il la revendre dans 5 ans?

val. initiale

Règle

$a = 10\,500$

$c = 100\% + 10\% = 110\% = 1{,}1$

$y = 10\,500 \cdot 1{,}1^x$

x : nb années

y : valeur ($)

2) Valeur dans 5 ans

$y = 10500 \cdot 1{,}1^x$

$y = 10500 \cdot 1{,}1^5$

$y \approx 16910{,}36\$$

F) Recherche de la règle d'une fonction exponentielle lorsqu'on ne connaît pas la valeur initiale

Lorsqu'on ne connaît pas la valeur initiale de la fonction exponentielle, on doit d'abord trouver le facteur multiplicatif (*c*) et ensuite trouver la valeur initiale (*a*) à l'aide des coordonnées d'un point. Regardons des exemples concrets.

Exemple : Dans chaque cas, détermine la règle de la fonction exponentielle associée à la table de valeurs.

$y = a \cdot c^x$

Bonds de 1 en « x » :

a)

x	3	4	5
y	384	1536	6144

(+1, +1 ; ×4, ×4)

1) Paramètre c

$c = \frac{1536}{384} = 4$

$y = 6 \cdot 4^x$

2) Paramètre a

$y = a \cdot 4^x$

$384 = a \cdot 4^3$

$384 = 64a$

$6 = a$

b)

x	2	3	4
y	36	216	1296

(+1 ; ×6, ×6)

1) Paramètre c

$c = \frac{216}{36} = 6$

$y = 6^x$

2) Paramètre a

$y = a \cdot 6^x$

$36 = a \cdot 6^2$

$36 = 36a$

$1 = a$

c)

x	-3	-2	-1
y	-54	-18	-6

(+1 ; $\times \frac{1}{3}$, $\times \frac{1}{3}$)

1) Paramètre c

$c = \frac{-18}{-54} = \frac{1}{3}$

$y = -2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

2) Paramètre a

$y = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x$

$-6 = a \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

$-6 = a \cdot 3$

$-2 = a$

Bonds différents de 1 en « x » :

a)

x	1	3	5
y	6	54	486

+2 +2

×9 ×9

1) Paramètre c

$c = \sqrt{\frac{54}{6}} = \sqrt{9} = 3$

$\sqrt{}$ car bond de 2 en x

2) Paramètre a

$y = a \cdot 3^x$

$6 = a \cdot 3^1$

$6 = 3a$

$2 = a$

$y = 2 \cdot 3^x$

b)

x	-3	-1	1
y	-2	-0.5	-0.125

c)

x	-2	1	4
y	0.01	10	10000

+3 +3

1) Paramètre c

$c = \sqrt[3]{\frac{10000}{10}} = \sqrt[3]{1000} = 10$

2) Paramètre a

$y = a \cdot 10^x$

$10 = a \cdot 10^1$

$10 = 10a$

$1 = a$

$y = 10^x$

d)

x	-5	-2	1
y	1215	45	1,6667

e)

x	1	2	3
y	$\frac{1}{2}$	2	8

f)

x	1	3	5
y	14	686	33614

g)

x	-4	-3	-2
y	1875	375	75

h)

x	0	3	4
y	8	216	648

i)

x	-1	0	4
y	$\frac{3}{2}$	3	48

j)

x	-5	-4	-3
y	-2048	-512	-128

+1

1) Paramètre c

$c = \frac{-512}{-2048} = \frac{1}{4}$

2) Paramètre a

$y = a \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$

$-128 = a \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

$-128 = a \cdot 64$

$-2 = a$

$y = -2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x$

k)

x	-11	-8	-5
y	1024	128	16

+3

1) Paramètre c

$c = \sqrt[3]{\frac{128}{1024}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

2) Paramètre a

$y = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$1024 = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-11}$

$1024 = a \cdot 2048$

$\frac{1}{2} = a$

$y = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

l)

x	1	2	3
y	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$

G) Comment reconnaître le type de fonction selon la table de valeurs

Indices pour repérer les types de fonctions

- ✓ Pour une fonction exponentielle : lorsque l'abscisse augmente de 1 unité, l'ordonnée est toujours multipliée par la même valeur.
- ✓ Pour une fonction périodique : on observe une régularité.
- ✓ Pour une fonction exponentielle : il est impossible d'avoir le point de coordonnées $(0, 0)$.
- ✓ Pour une fonction affine : lorsque l'abscisse augmente de 1 unité, l'ordonnée à l'origine est toujours additionnée par la même valeur. (On peut trouver le même taux de variation, peu importe les points choisis).

De quel type de fonction s'agit-il entre une fonction exponentielle, quadratique, périodique ou affine?

a)

x	0	1	2	3
$g(x)$	0	4	16	36

$y = ax^2$ $4 = a \cdot 1^2$ $4 = a$ $y = 4x^2$ $y = 4 \cdot 2^2$ $y = 16$

Quadratique (Ø directe, car Ø de taux de variation)

b)

x	1	2	3	4
$f(x)$	-6	-12	-24	-48

×2 ×2 ×2

exponentiel (facteur multiplicatif)

c)

x	1	2	3	4
$k(x)$	8	11	14	17

+3 +3 +3

Partielle (affine) (régularité additive)

d)

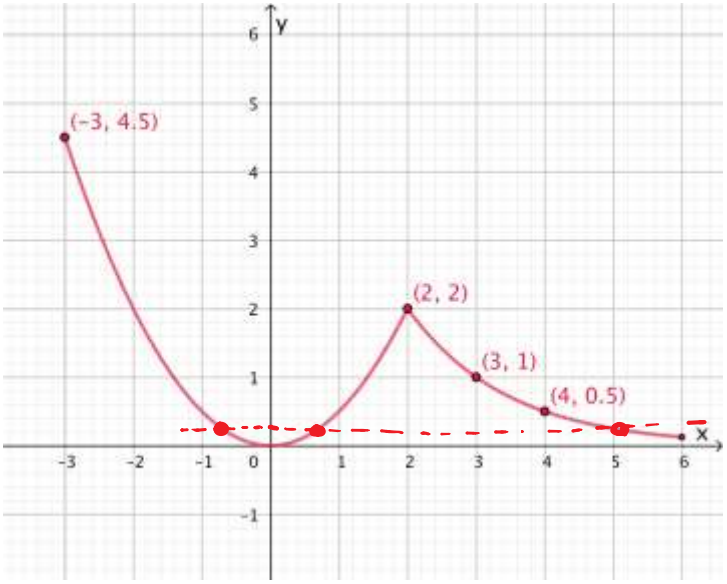
x	-2	0	2	4
$w(x)$	5	-5	5	-5

périodique (même suite de nbs qui se répètent)

H) Les fonctions définies par parties – suite

Exemples :

1) Voici la représentation graphique d'une fonction définie par partie :



a) Quelle est la règle de cette fonction définie par parties?

1re partie
Fct quadratique

$y = ax^2$

$2 = a \cdot 2^2$

$2 = a \cdot 4$

$\frac{1}{2} = a$

$y = \frac{1}{2}x^2$

2e partie
Fct exponentielle

$y = a \cdot c^x$

1) Paramètre c

$+1 \left(\begin{matrix} (2,2) \\ (3,1) \end{matrix} \right) \times \frac{1}{2}$

$c = \frac{1}{2}$

2) Paramètre a

$y = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$1 = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$

$1 = a \cdot \frac{1}{8}$

$8 = a$

$y = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & x \in [-3,2] \\ 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x & x \in [2,6] \end{cases}$$

↳ $x = 4{,}5$ $y = ?$

b) Calcule $f(4{,}5)$.

$f(4{,}5) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4{,}5}$

$f(4{,}5) \approx 0{,}35$

↳ $y = 0{,}25$ $x = ?$

c) Détermine les valeurs de x pour lesquelles $f(x) = 0{,}25$.

* 3 valeurs à trouver

1re partie

$f(x) = \frac{1}{2}x^2$

$0{,}25 = \frac{1}{2} \cdot x^2$

$\sqrt{0{,}5} = \sqrt{x^2}$

$\pm 0{,}71 \approx x$

$x \approx 0{,}71$ ou $x \approx -0{,}71$

2e partie

$f(x) = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$0{,}25 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\frac{1}{32} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

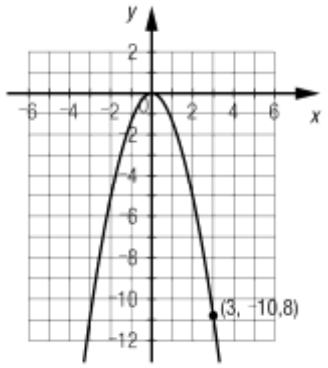
$5 = x$

$x = \{-0{,}71 ; 0{,}71 ; 5\}$

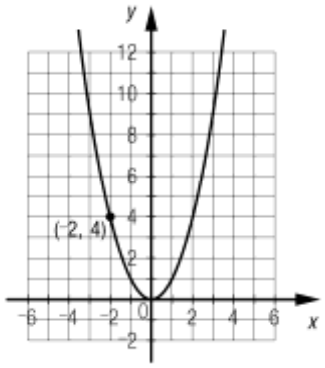
Exercices

1. Déterminez la règle de la fonction polynomiale de degré deux dans chaque cas.

a)



b)

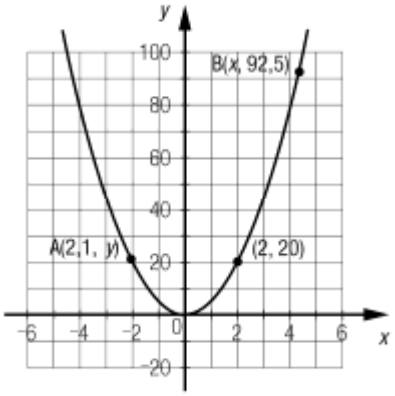


c)

x	y
−4	−48
−2	−12
0	0
2	−12
4	−48
6	−108

2. Voici la représentation graphique d'une fonction polynomiale de degré deux.

a) Quelle est la règle de cette fonction?

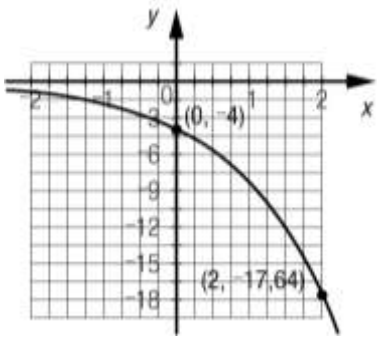


b) Détermine la valeur de y.

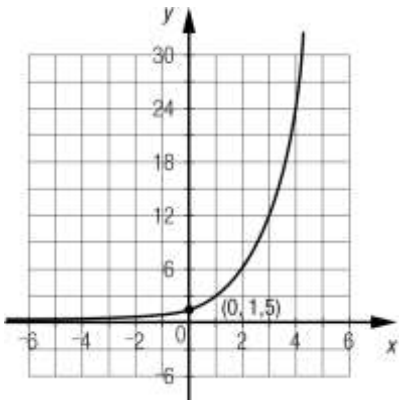
c) Détermine la valeur de x.

3. Dans chaque cas, détermine la règle de la fonction exponentielle qui peut être associée aux graphiques ou aux tables des valeurs ci-dessous.

a)



b)



c)

x	-1	0	2
y	2	1	$\frac{1}{4}$

4. La table des valeurs ci-dessous fournit des renseignements sur une culture bactérienne.

Temps (heures)	Nombre de bactéries
0	3000
1	6000
2	12 000
3	24 000
4	48 000

a) Déterminez la règle qui permet de calculer le nombre de bactéries en fonction du temps.

b) À quel moment le nombre de bactéries atteindra-t-il 192 000?

c) À quel moment le nombre de bactéries atteindra-t-il 3 072 000?

5. Une colonie de bactéries compte 32 individus. Le nombre de bactéries dans cette colonie quadruple à toutes les heures. Combien y aura-t-il de bactéries dans cette colonie dans 30 minutes?

6. Il y a quelques années, ton grand-père a acheté un chalet. Depuis, le 1er juin de chaque année, il fait analyser l'eau du lac situé en face de son chalet.

À l'aide des données recueillies au cours des dernières années, on a établi que la fonction *f* décrite ci-dessous représente le nombre de bactéries présentes dans l'eau du lac selon le temps écoulé depuis que ton grand-père a acheté son chalet.

$$f(x) = 1500(1{,}2)^x$$

où x : temps écoulé, en années, depuis que ton grand-père a acheté son chalet
f(x) : nombre de bactéries par 100 mL d'eau

En 2015, l'analyse a révélé que l'eau du lac contenait 2 592 bactéries par 100 mL. En quelle année l'analyse révélera-t-elle pour la première fois un nombre de bactéries par 100 mL d'eau supérieur à 5000?

1) Trouver le temps écoulé en 2015

$f(x) = 1500 \cdot (1{,}2)^x$
$2592 = 1500 \cdot (1{,}2)^x$
$1{,}728 = 1{,}2^x$
$1{,}2^3 = 1{,}2^x$
$3 = x$

En 2015, il y avait 3 ans d'écoulés depuis l'achat du chalet.

2) Année achat du chalet

$2015 - 3 = 2012$

3) Trouver $f(x) = 5000$

$f(x) = 1500 \cdot (1{,}2)^x$
$5000 = 1500 \cdot (1{,}2)^x$
$3{,}\overline{3} = 1{,}2^x$

x	5	6	7
f(x)	2,49	2,99	3,58

Entre la 6e et la 7e année

si $x = 6 \rightarrow 2012 + 6 = 2018$
si $x = 7 \rightarrow 2012 + 7 = 2019$

L'analyse révèlera un nb de bactéries supérieur à 5000 en 2019.

7. Voici les tables de valeurs de fonctions exponentielles, quadratiques et linéaires. Pour chaque table de valeurs, identifie le type de fonction et détermine la règle qui lui correspond.

a)

x	$f_1(x)$
2	-2
4	-1
6	0
8	1
10	2

b)

x	$f_2(x)$
-2	0,24
-1	1,2
0	6
1	30
2	150

c)

x	$f_3(x)$
-5	175
-4	112
-3	63
-2	28
-1	7

d)

x	$f_4(x)$
2	2
4	8
6	18
8	32
10	50

e)

x	$f_5(x)$
-5	486
-4	162
-3	54
-2	18
-1	6

f)

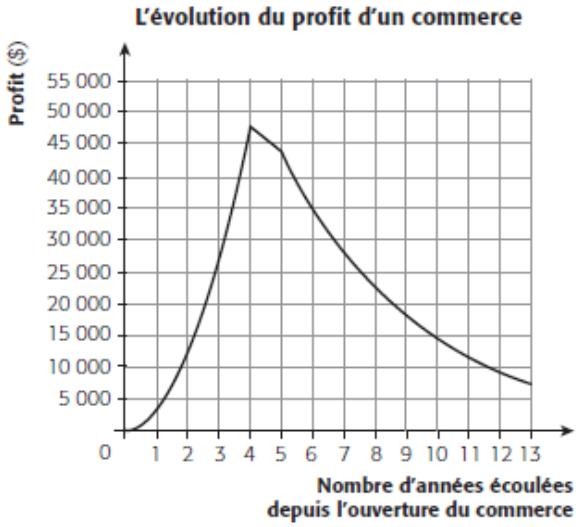
x	$f_6(x)$
1	1,6
3	2,8
5	4
7	5,2
9	6,4

8. Le graphique ci-contre représente l'évolution du profit annuel d'un commerce en fonction du nombre d'années écoulées depuis son ouverture.

- Pour les quatre premières années d'observation, la courbe a été modélisée par une fonction quadratique de la forme $f(x) = ax^2$.

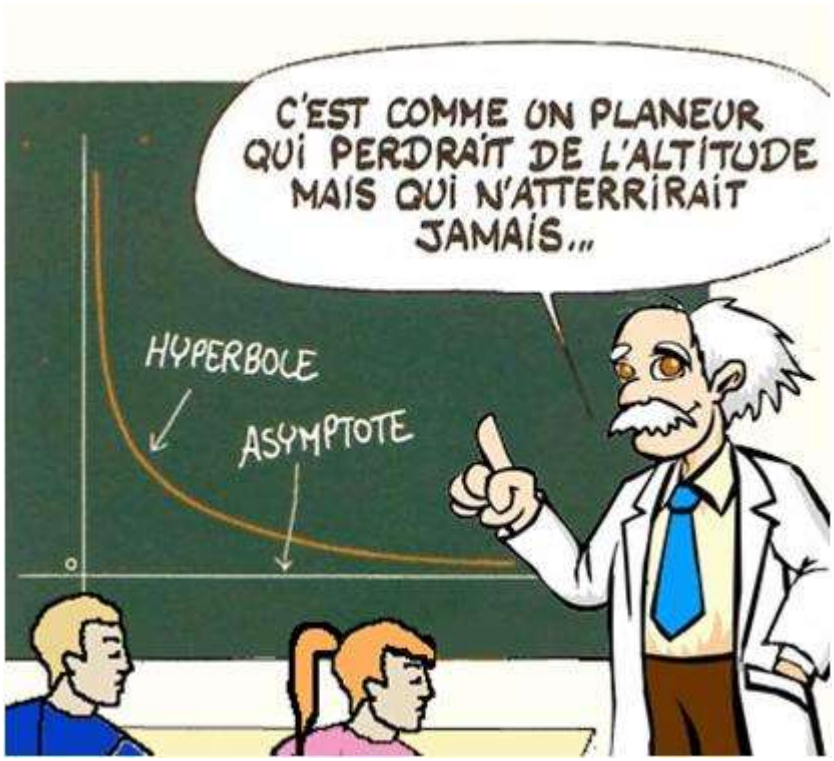
- Deux ans après l'ouverture, le profit du commerce était de 12 000 $.

- Quatre ans après l'ouverture du commerce, le profit a commencé à diminuer. Pendant la première année de diminution, le profit du commerce a diminué de 4 000 $.



- Cinq ans après l'ouverture du commerce, l'évolution de son profit annuel peut être modélisée par une fonction exponentielle de la forme $f(x) = ac^x$. Pendant cette période, on estime que le profit a chuté de 20 % chaque année par rapport à l'année précédente.

Si le profit du commerce continue d'évoluer de cette façon, combien vaudra-t-il 15 ans après son ouverture ?


C'EST COMME UN PLANEUR QUI PERDRAIT DE L'ALTITUDE MAIS QUI N'ATTERRIRAIT JAMAIS...
HYPERBOLE
ASYMPTOTE